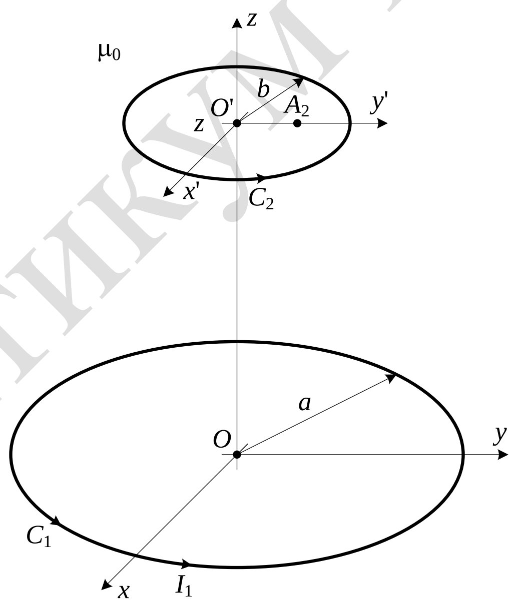
ПРАКТИКУМ ИЗ ОСНОВА ЕЛЕКТРОТЕХНИКЕ 2
настава на даљину

Београд 22. март 2022. године.

Први домаћи задатак из ПОЕТ2, школска 2021/22. година

Две усамљене кружне контуре, C_1 и C_2, налазе се у вакууму, као што је приказано на слици 1. Прва контура, полупречника $a = 1\,\mathrm{m}$, лежи у Oxy равни Декартовог координатног система, а центар јој је у координатном почетку (тачка O). Друга контура, полупречника $b = 0{,}5\,\mathrm{m}$, постављена је паралелно са првом контуром, а центар јој је на z-оси на висини $z = 2\,\mathrm{m}$ (тачка O'). Ако у првој контури постоји стална струја јачине $I_1 = 1\,\mathrm{A}$, израчунати z-компоненту вектора магнетске индукције, $B_z(y')$, у тачки A_2 која се налази на позитивном делу y'-осе и приказати зависност $B_z(y')$ за $0 \le y' \le b$. На том графику јасно назначити бројне вредности за $B_z(0)$ и $B_z(b)$. Прорачунати тражене величине са барем три тачне значајне цифре.

Бонус: На основу решења претходног дела, израчунати флукс вектора магнетске индукције кроз контуру C_2, Φ_2. Израчунати релативну грешку (у процентима) за флукс $\Phi_2^{'}$ који се добија под претпоставком да је вектор магнетске индукције који ствара контура C_1 константан по површи контуре C_2 и једнак вектору магнетске индукције у тачки O'



Слика 1.

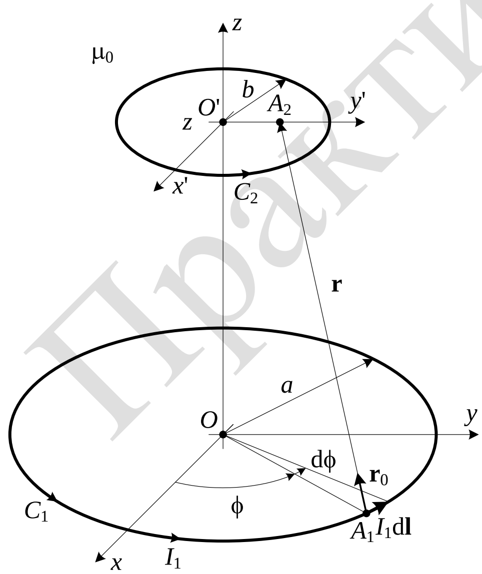
Рок за слање решења домаћих задатака, коришћењем линка https://oet.etf.rs/POET2/up.html (`https://oet.etf.rs > POET2 > Domaći zadaci`), је 23. март 2022. године у 12:00 часова. Решење задатака би требало да садржи и поступак решавања (аналитичко извођење или програмски код и слике решења у софтверу који је коришћен).

Решење:

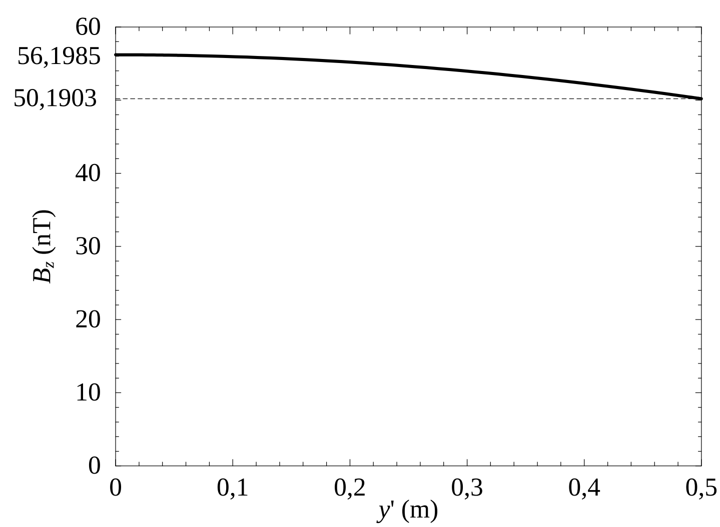
Посматрајмо струјни елемент доње контуре $I_1\mathrm{d}\mathbf{l}$ који се налази у тачки A_1, чије су Декартове координате $A_1(a\cos\phi, a\sin\phi, 0)$, као што је приказано на слици 2, и одредимо z-компоненту вектора магнетске индукције коју он ствара у тачки $A_2(0, y', z)$. На основу Био-Саваровог закона имамо да је $\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{r}_0}{r^2}$, при чему је $\mathbf{r}_0$ орт вектора положаја тачке A_2 у односу на посматрани струјни елемент. Претходни израз може се записати и као $\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3}$, при чему је $\mathbf{r} = -a\cos\phi\mathbf{i}_x + (y' - a\sin\phi)\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z$ вектор положаја тачке A_2 у односу на посматрани струјни елемент, а $r = \sqrt{(a\cos\phi)^2 + (y' - a\sin\phi)^2 + z^2}$ је растојање између тачке A_2 и посматраног струјног елемента.

Полазећи од претходних израза, за z-компоненту вектора магнетске индукције у тачки A_2 коју ствара посматрани струјни елемент добијамо $\mathrm{d}B_z = \mathbf{i}_z\cdot\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi r^3}\mathbf{i}_z\cdot(\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{r})$. Вектор дужине посматраног струјног елемента је $\mathrm{d}\mathbf{l} = (-\sin\phi\mathbf{i}_x + \cos\phi\mathbf{i}_y)a\mathrm{d}\phi$. За претходни мешовити производ добијамо $\mathbf{i}_z\cdot(\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{r}) = \left[\cos^2\phi + \sin\phi\left(\sin\phi - \frac{y'}{a}\right)\right]a^2\mathrm{d}\phi$, па израз за z-компоненту вектора магнетске индукције у тачки A_2 коју ствара посматрани струјни елемент постаје $\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi a}\frac{\cos^2\phi + \sin\phi\left(\sin\phi - \frac{y'}{a}\right)}{\left[\cos^2\phi + \left(\sin\phi - \frac{y'}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right]^{3/2}}\mathrm{d}\phi$.

Применом принципа суперпозиције, z-компонента вектора магнетске индукције у тачки A_2 која потиче од контуре C_1 са струјом I је $B_z(y') = \int_{\phi=0}^{2\pi}\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi a}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{\cos^2\phi + \sin\phi\left(\sin\phi - \frac{y'}{a}\right)}{\left[\cos^2\phi + \left(\sin\phi - \frac{y'}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right]^{3/2}}\mathrm{d}\phi$ и њен интензитет приказан је на слици 3 за $0 \le y' \le b$.



Слика 2.



Слика 3.

Бонус: Тражени флукс је $\Phi_2 = \int\limits_{y'=0}^{b} 2\pi y' B_z(y')\mathrm{d}y' \approx 41{,}7381\ \mathrm{nWb}$. Ако би се сматрало да је вектор магнетске индукције који ствара контура C_1 константан по површи контуре C_2 и једнак вектору магнетске индукције у тачки O', $\mathbf{B}_{0'} = \dfrac{\mu_0 I_1 a^2}{2\left(z^2 + a^2\right)^{3/2}} \mathbf{i}_z$, за флукс бисмо добили $\Phi_2' = \dfrac{\mu_0 I_1 a^2}{2\left(z^2 + a^2\right)^{3/2}} b^2 \pi \approx 44{,}1382\ \mathrm{nWb}$, чиме бисмо направили релативну грешку од око $5{,}75\%$.